

## Zur Strömung im asymmetrischen kurzen Rohr

W. FRIE und PH. JÄGER

Siemens-Aktiengesellschaft, Forschungslaboratorium Erlangen

(Z. Naturforsch. 23 a, 1721—1727 [1968]; eingegangen am 15. August 1968)

Zur Beschreibung der Strömung in einem Rohr steht die Kennlinie für die ungestörte Rohrströmung zur Verfügung. Außerdem sind die durch Ein- und Ausströmöffnungen verursachten Zusätze zum Druckgefälle für den Fall voller Turbulenz in der Literatur behandelt. Es sind auch weiterreichende theoretische Untersuchungen unter vereinfachenden Voraussetzungen bekannt. Die Abhängigkeit des Druckabfalles an einem asymmetrischen kurzen Rohr von der Durchflußgeschwindigkeit im Übergangsgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömung läßt sich damit nicht befriedigend wiedergeben. In der vorliegenden Arbeit werden die theoretischen Überlegungen zur ungestörten Rohrströmung auf die „gestörte Strömung im kurzen Rohr“ erweitert und mit Messungen verglichen. Es ergibt sich dabei eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

### I. Einleitung

In vielen technisch interessanten Fällen ist das durchströmte Rohr nicht so lang, daß die Beiträge der Ein- und Ausströmöffnungen zum Druckabfall gegenüber dem Abfall am reinen Rohr vernachlässigt werden können. Die Flüssigkeit bildet beim Eintritt in das Rohr eine Einschnürung (vena contracta), von der sich Wirbel ablösen. Ist das Rohr kurz, dann verteilt sich die von der Einstromöffnung herrührende Störung nahezu homogen über die ganze Rohrlänge (Abb. 1). Diese Strömungsform soll im Gegensatz zur ungestörten Rohrströmung als „gestörte Rohrströmung“ bezeichnet werden.

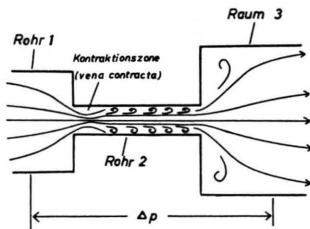


Abb. 1. Das asymmetrische Rohr mit Strömungslinien (schematisch).

Die reine Rohrreibung im Übergangsgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömung wurde bereits theoretisch behandelt<sup>1</sup>. Gesucht war eine Beziehung zwischen der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho \bar{v}_2 2R}{\eta} \quad (1a)$$

und der Widerstandszahl

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}_2^2} \frac{2R}{L} \quad (1b)$$

<sup>1</sup> W. FRIE, Z. Naturforsch. 23 a, 1478 [1968].

$\rho$  ist dabei die Dichte der Flüssigkeit,  $\eta$  ihre Zähigkeit.  $R$  ist der Radius,  $L$  die Länge des Rohres;  $\bar{v}_2$  bezeichnet die mittlere Geschwindigkeit im Rohr 2. Es gelang, eine analytische Lösung herzuleiten, die die ungestörte Rohrströmung für alle Reynolds-Zahlen beschreibt. Es ist damit für jede Reynolds-Zahl die Geschwindigkeitsverteilung angebar. Kernstück dieser Theorie ist ein Anregungsgesetz für die turbulente Energie, das den Turbulenzgrad  $g$  darstellt in der Form

$$\frac{g}{1-g} = \frac{Re^2 \lambda}{6,932 \cdot 10^5} \exp \left\{ -\frac{E}{Re^2 \lambda} \right\} \quad (2)$$

$Re^2 \lambda$  ist dem Druckgefälle  $\Delta p$  proportional, und  $E$  ist eine dimensionslose Größe, die den Wert

$$E = 2,432 \cdot 10^5 \quad (3)$$

hat und ihrer Bedeutung wegen als „Anregungsenergie“ bezeichnet wird.

Da bei einem kurzen Rohr ein merklicher Anteil des Druckgefälles dazu verwandt werden muß, die Flüssigkeit in das Rohr hineinzupressen, hat diese starke Erhöhung des Druckgefälles gegenüber dem Wert am reinen Rohr auf die Exponentialfunktion denselben Einfluß wie eine Erniedrigung der Anregungsenergie  $E$ . Setzt man in der Theorie der ungestörten Rohrströmung die Größe  $E$  gleich Null, dann bekommt man eine neue Lösung, die einer schon unterhalb der kritischen Reynolds-Zahl turbulenten Strömung entspricht. In<sup>1</sup> wurde bereits angedeutet, daß diese Lösung  $E=0$  die oben definierte gestörte Rohrströmung zu beschreiben gestattet. Wie weit dies zutrifft, soll der Vergleich mit einer an einem asymmetrischen kurzen Rohr durchgeführten Messung des Strömungswiderstandes zeigen.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Außer der reinen Rohrströmung müssen dabei die durch die Ein- und Ausströmöffnungen verursachten Zusätze zum Druckabfall berücksichtigt werden. Diese Effekte sind in der Literatur behandelt<sup>2-4</sup>. Da die Geschwindigkeitsverteilung bisher nicht hinreichend bekannt war, beziehen sich die Untersuchungen<sup>2,3</sup> nur auf volle Turbulenz, während die Ergebnisse, die von KAYS<sup>4</sup> angegeben wurden, wegen der Annahme einer homogenen Geschwindigkeitsverteilung in der vena contracta nur für große Querschnittsprünge gültig sind. Interessiert vor allem das Übergangsgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömung, dann müssen die benötigten Formeln neu hergeleitet werden, was im Abschnitt III geschehen soll.

## II. Die Messungen

Die in Abb. 1 nur schematisch angedeutete Anordnung ist in Abb. 2 etwas genauer dargestellt. Die Flüssigkeit strömte durch eine Bohrung von

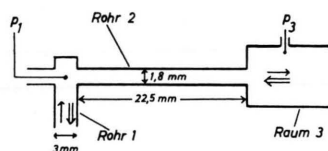


Abb. 2. Die Meßanordnung.

3 mm Durchmesser (Rohr 1) ein, zweigte dann senkrecht in das Rohr 2 von 1,8 mm Durchmesser und 22,5 mm Länge ab und floß schließlich in eine praktisch unendlich weite Dose von 8 mm Höhe (Raum 3). Diese Strömungsrichtung wird im folgenden mit dem Index 1–3 bezeichnet. Die umgekehrte Strömungsrichtung von Raum 3 über das Rohr 2 zum Rohr 1 bekommt den Index 3–1. Als Strömungsmedium wurde destilliertes Wasser verwendet. Zur Messung des Ein- und Ausgangsdruckes waren in Fortsetzung des Rohres 2 und an Raum 3 zwei Bohrungen angebracht. Als Registriergeräte dienten oben offene Steigrohrmanometer. Die beiden Meßstellen  $p_1$  und  $p_3$  konnten gleichzeitig abgelesen werden. Der Durchfluß wurde zwischen 20 cm<sup>3</sup>/min und 170 cm<sup>3</sup>/min variiert. In Abb. 3 sind die Druckdifferenzen für die Strömungsrichtungen

1–3 und 3–1 gegen den Durchfluß aufgetragen. Die Meßwerte für die Strömungsrichtung 1–3 waren dabei stets größer als die für die Strömungsrichtung 3–1.

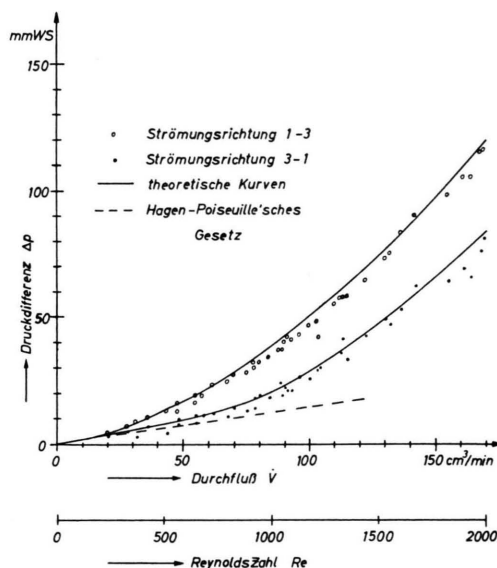


Abb. 3. Der Druckabfall am asymmetrischen Rohr für die beiden Strömungsrichtungen.

Die mehr als lineare Zunahme der beiden Druckdifferenzen weist darauf hin, daß die Störungen der laminaren Strömung (Reynolds-Zahl um 1000) und die Zusatzeffekte nicht zu vernachlässigen sind und genauer untersucht werden müssen.

## III. Ableitung der Formeln für eine plötzliche Querschnittsänderung

Eine Strömung wird im allgemeinen durch die Kraftgleichung oder Impulsbilanz beschrieben. Diese hat im stationären Falle die Form:

$$\text{Div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{I} + \mathbf{T}) = 0. \quad (4a)$$

Dabei ist  $\rho$  die als konstant angenommene Dichte des strömenden Mediums und  $\mathbf{v}$  seine Geschwindigkeit;  $p$  ist der Druck,  $\mathbf{I}$  der Einheitstensor und  $\mathbf{T}$  der Spannungstensor. Bei einer reinen Rohrströmung ist der Impulsstrom  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$  divergenzfrei, so daß man als nullte Näherung bekommt:

$$\text{Div}(p^{(0)} \mathbf{I} + \mathbf{T}) = 0. \quad (4b)$$

<sup>2</sup> B. ECK, Technische Strömungslehre, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1961, S. 244 ff.

<sup>3</sup> J. K. VENNARD, One Dimensional Flow, Handbook of Fluid Dynamics, Sect. 3, S. 3–18 ff. McGraw-Hill Book Comp. Inc., New York 1961.

<sup>4</sup> W. M. KAYS, Trans. ASME **72**, 1067 [1950]; VDI Wärmeatlas Lc1, VDI-Verlag, Düsseldorf 1963.

Die Strömungskennlinie ergibt sich hieraus als dimensionslose Beziehung zwischen der Reynolds-Zahl  $Re$  und der Widerstandszahl  $\lambda$  (Abb. 4). Zwischen

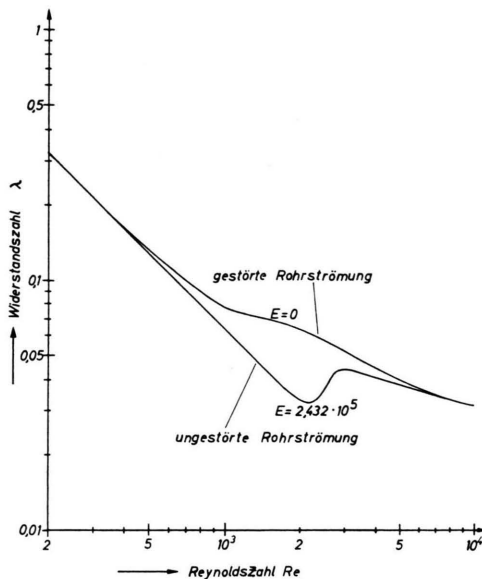


Abb. 4. Theoretische Strömungskennlinien für die ungestörte und die gestörte Rohrströmung nach <sup>1</sup>.

der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}_2$  im Rohr 2 und dem Volumendurchfluß  $\dot{V}$  besteht die Beziehung

$$\dot{V} = R^2 \pi \bar{v}_2. \quad (5)$$

Bei Querschnittsänderungen bekommt der Druck einen Zusatz  $p^{(1)}$ , der sich als erste Näherung aus der Gleichung

$$\text{Div}(\varrho \mathbf{v} \mathbf{v} + p^{(1)} \mathbf{I}) = 0 \quad (6)$$

berechnet <sup>5</sup>. Da sich die folgenden Betrachtungen nur auf Gl. (6) beziehen, wird beim Druckzusatz  $p^{(1)}$  der obere Index fortgelassen. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes <sup>6</sup> kann man den Impulssatz in ein Oberflächenintegral über ein endliches Volumen umformen:

$$\varrho \int d\mathbf{o} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} + \int d\mathbf{o} p = 0. \quad (7)$$

$d\mathbf{o}$  bezeichnet dabei das Flächenelement.

Zum Impulssatz kommt noch der Erhaltungssatz für die Masse

$$\text{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad (8a)$$

$$\text{oder} \quad \int d\mathbf{o} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8b)$$

Wird außer dem in der nullten Näherung enthaltenen Anteil keine weitere Wärme mehr erzeugt, dann lautet der Satz für die Energieerhaltung:

$$\text{div}(p \mathbf{v} + \tfrac{1}{2} \varrho v^2 \mathbf{v}) = 0 \quad (9a)$$

$$\text{oder} \quad \int d\mathbf{o} \cdot \mathbf{v} (p + \tfrac{1}{2} \varrho v^2) = 0. \quad (9b)$$

Die Gln. (8b) und (9b) kann man auf einen Stromfaden mit dem Querschnitt  $df$  anwenden. Da in diesem Falle die Mantelfläche keinen Beitrag zu den Integralen liefert ( $d\mathbf{o}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{v}$ ), bekommt man für die Massenerhaltung aus (8b):

$$v df = \text{const} \quad (10)$$

für die Energieerhaltung aus (9b):

$$(p + \tfrac{1}{2} \varrho v^2) v df = \text{const} \quad (11a)$$

oder mit (10) die Bernoullische Gleichung

$$p + \tfrac{1}{2} \varrho v^2 = \text{const}. \quad (11b)$$

Den Impulssatz kann man nicht in dieser Art umformen, da das Integral  $\int d\mathbf{o} p$  über die Mantelfläche nicht verschwindet.

Bei der Anwendung der oben angegebenen Sätze auf eine Strömung durch einen endlichen Querschnitt treten die Integrale  $\int df v^k$  auf. Deshalb sei definiert:

$$\bar{v} = \frac{1}{F} \int df v = \dot{V}/F \quad (12a)$$

und

$$\gamma_k = \frac{\overline{v^k}}{\bar{v}^k} = \frac{\int df v^k}{F \bar{v}^k}. \quad (12b)$$

Insbesondere ist

$$\gamma_k = \frac{2k}{k+1} \quad \text{bei laminarer Strömung,} \quad (13a)$$

$$\gamma_k \approx 1 \quad \text{bei voller Turbulenz.} \quad (13b)$$

Die Korrekturfaktoren  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  lassen sich auf Grund der theoretischen Überlegungen über die reine Rohrströmung <sup>1</sup> berechnen. Sie sind in Abb. 5 für die ungestörte und die gestörte Rohrströmung aufgezeichnet. Da im folgenden immer von mehreren Querschnitten die Rede ist, werden  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  durch  $\gamma_{2,i}$  und  $\gamma_{3,i}$  ersetzt, wobei der zweite Index  $i$  den Querschnitt  $i$  bezeichnet.

Abb. 6 a zeigt eine plötzliche Querschnittsänderung für den Fall einer Ausströmung aus einem engen Kanal. Eingezeichnet sind die Strömungslinien

<sup>5</sup> W. NUSSELT, Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A 11, 250 [1940].

<sup>6</sup> M. LAGALLY u. W. FRANZ, Vorlesungen über Vektorrechnung, 5. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig, Leipzig 1956, Paragraph 85.

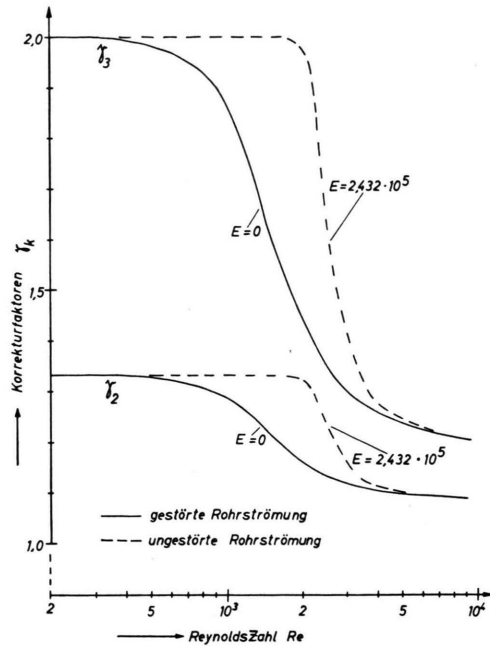


Abb. 5. Die Korrekturfaktoren  $\gamma_k = \bar{v}_k / \bar{v}^k$  für die ungestörte und die gestörte Rohrströmung nach <sup>1</sup>.

(ausgezogen), etwa senkrecht dazu die Flächen gleichen Druckes (gestrichelt) und die Integrationsfläche (punktirt). Gesucht ist die Druckdifferenz zwischen den Querschnitten 1 und 2. Wendet man auf diese Figur den Satz (7) an, dann bekommt man:

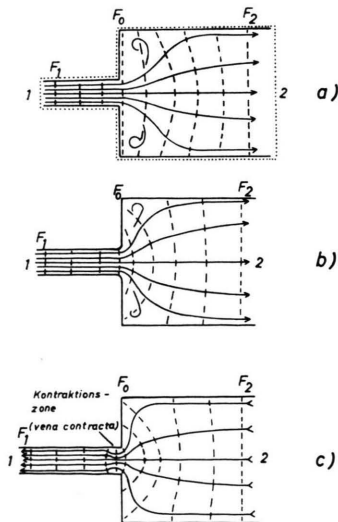


Abb. 6. a) Querschnittsänderung mit scharfer Kante (Ausströmung); b) Querschnittsänderung mit gerundeter Kante (Ausströmung); c) Querschnittsänderung (Einströmung). Gestrichelt: Flächen gleichen Druckes; punktirt: Integrationsfläche.

$$p_1 F_1 + \varrho \bar{v}_1^2 \gamma_{2,1} F_1 + \int_{F_0} df p = p_2 F_2 + \varrho \bar{v}_2^2 \gamma_{2,2} F_2. \quad (14)$$

Im Falle der Abb. 6 a (Borda-Carnot-Prozeß) ist das Integral  $\int_{F_0} df p$  leicht zu berechnen. Es ist hier einfach gleich  $p_1 (F_2 - F_1)$ .

Ist die Kante etwas abgerundet (Abb. 6 b), dann laufen die Stromlinien schneller auseinander, die Flächen gleichen Druckes werden stärker gekrümmt, und der Druck ist längs der Fläche  $F_0$  nicht mehr konstant, sondern größer als  $p_1$ . Es ist also allgemein

$$\int_{F_0} df p \geq p_1 (F_2 - F_1). \quad (15)$$

Das Gleichheitszeichen gilt dabei für die scharfe Kante (Abb. 6 a). Außerdem folgt aus (10)

$$\bar{v}_1 F_1 = \bar{v}_2 F_2. \quad (16)$$

Man bekommt so aus (14)

$$p_2 F_2 + \varrho \bar{v}_2^2 \gamma_{2,2} F_2 \geq p_1 F_2 + \varrho \bar{v}_1^2 \gamma_{2,1} F_1,$$

also

$$p_1 - p_2 \leq \frac{1}{2} \varrho \bar{v}_1^2 \zeta_a \quad (17 a)$$

mit

$$\zeta_a = 2 \frac{F_1}{F_2} \left( \gamma_{2,2} \frac{F_1}{F_2} - \gamma_{2,1} \right). \quad (17 b)$$

Diese Formel findet sich in ähnlicher Form auch bei KAYS <sup>4</sup>. Das Minimum der Druckdifferenz ist durch die Bernoullische Gl. (11 b) gegeben:

$$(p_1 - p_2)_{\text{Bern.}} = \frac{1}{2} \varrho (\bar{v}_2^2 \gamma_{3,2} - \bar{v}_1^2 \gamma_{3,1}) = \frac{1}{2} \varrho \bar{v}_1^2 \zeta_{\text{Bern.}}$$

mit

$$\zeta_{\text{Bern.}} = \left( \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^2 \gamma_{3,2} - \gamma_{3,1} \right). \quad (18)$$

Es ist leicht ersichtlich, daß außer beim Borda-Carnot-Prozeß (Abb. 6 a) das Druckintegral über die Fläche  $F_0$  nur schwer zu erfassen ist. Insbesondere gilt dies auch für den Fall der Einströmung (Abb. 6 c). Weil die Ergebnisse, die KAYS <sup>4</sup> abgeleitet hat, nur für einen begrenzten Bereich gültig sind, ist man weitgehend auf experimentelle Werte angewiesen (s. Anm. <sup>3</sup>, Tab. 3-2). Für die Einströmung aus einem sehr großen Querschnitt ( $F_1/F_2 \rightarrow 0$ ) läßt sich jedoch eine einfache, plausible Formel angeben. Es muß dann die Druckdifferenz proportional  $\gamma_{2,1}$  sein:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \varrho \bar{v}_1^2 \zeta_e \quad (19 a)$$

mit

$$\zeta_e = c_0 \gamma_{2,1}. \quad (19 b)$$

Der entsprechende Bernoullische Wert ist nach Gl. (18):

$$\zeta_{e, \text{Bern.}} = \gamma_{3,1},$$

der Überschuß, der in Wärme umgesetzt wird, also:

$$K_c = \zeta_e - \zeta_{e, \text{Bern.}} = c_0 \gamma_{2,1} - \gamma_{3,1}.$$

Nimmt man an, daß bei laminarer Strömung keine Wärmeverluste auftreten, dann folgt aus

$$\gamma_{2,1} = \frac{4}{3}; \quad \gamma_{3,1} = 2 \quad \text{und} \quad K_c = 0:$$

$$c_0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{also} \quad \left. \begin{array}{l} K_c = \frac{3}{2} \gamma_{2,1} - \gamma_{3,1} \\ \zeta_e = \frac{3}{2} \gamma_{2,1} \end{array} \right\} \text{für } \frac{F_1}{F_2} \rightarrow 0. \quad (20)$$

Bei voller Turbulenz ergibt sich aus (13 b) und (20) für den Wärmeverlust:

$$K_c = \frac{1}{2}, \quad (21)$$

was mit dem bei VENNARD (s. Anm. <sup>3</sup>, Tab. 3-2) tabellierten Wert übereinstimmt. Die Abhängigkeit der Größe  $K_c$  von der Reynolds-Zahl ist in Tab. 1 für die gestörte und die ungestörte Rohrströmung angegeben.

Re	$K_c$ gestörte   ungestörte Rohrströmung	
300	0	0
500	0,007	0
1000	0,068	0
1200	0,12	0
1500	0,215	0
2000	0,30	0,012
2500	0,35	0,15
3000	0,38	0,32
4000	0,40	0,39
5000	0,41	0,407
$\infty$	0,5	0,5

Tab. 1. Faktor  $K_c$  für den Energieverlust bei Einstromung aus einem Halbraum nach Gl. (20) für die gestörte und die ungestörte Rohrströmung.

#### IV. Auswahl der Grundlösung

Nach den vorangegangenen Betrachtungen ergibt sich für den am Kanal der Abb. 1 gemessenen Druckabfall

1) bei der Strömungsrichtung 1 – 3:

$$\Delta p_{1-3} = \Delta p_{\text{theor.}} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \zeta_{1-3} \quad (22 a)$$

$$= \frac{1}{2} \rho v_2^2 \left( \frac{L}{2R} \lambda(\text{Re}) + \zeta_{1-3} \right);$$

2) bei der Strömungsrichtung 3 – 1:

$$\Delta p_{3-1} = \Delta p_{\text{theor.}} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \zeta_{3-1} \quad (22 b)$$

$$= \frac{1}{2} \rho v_2^2 \left( \frac{L}{2R} \lambda(\text{Re}) + \zeta_{3-1} \right).$$

$\Delta p_{\text{theor.}}$  ist dabei der theoretische Druckabfall am Rohr 2 nach Gl. (4 b) (Abb. 4).  $\zeta_{1-3}$  und  $\zeta_{3-1}$  sind bei strenger Laminarität und bei voller Turbulenz reine Geometriefaktoren. Dazwischen liegt ein Übergangsgebiet, das durch die Abhängigkeit der Faktoren  $\gamma_{2,1}$  und  $\gamma_{3,1}$  von der Reynolds-Zahl gegeben ist. Die Abb. 7 zeigt die Verhältnisse genauer. Hier sind die Meßergebnisse von Abb. 3 in der Form

$$\frac{\Delta p_{1-3} - \Delta p_{3-1}}{\dot{V}^2} = \frac{\rho}{2 F_2^2} (\zeta_{1-3} - \zeta_{3-1}) \quad (23)$$

als Funktion des Volumendurchflusses  $\dot{V}$  aufgetragen. Beim Betrachten der Abbildung ist zu beachten, daß durch die Differenzbildung der relative Fehler merklich erhöht wird, so daß die Werte erheblich stärker streuen als in Abb. 3. Man sieht jedoch, daß die Messungen gerade das erwähnte Übergangsgebiet überstreichen. Dieses beginnt bei  $\text{Re} \approx 500$  und zeigt etwas oberhalb von  $\text{Re} = 1000$  den steilsten Abfall des Ausdrucks aus Gl. (23). Dieses Verhalten läßt sich durch die zur ungestörten Rohrströmung gehörenden Faktoren  $\gamma_{k,i}$  nicht erklären, da diese erst oberhalb von  $\text{Re} = 2000$  ihren Abfall haben (Abb. 5). Die als „gestörte Rohrströmung“ bezeichnete Lösung liefert jedoch Werte für die Faktoren  $\gamma_{k,i}$ , die auf den ersten Blick ihre direkte Beziehung zu den in Abb. 7 aufgetragenen Messungen erkennen lassen.

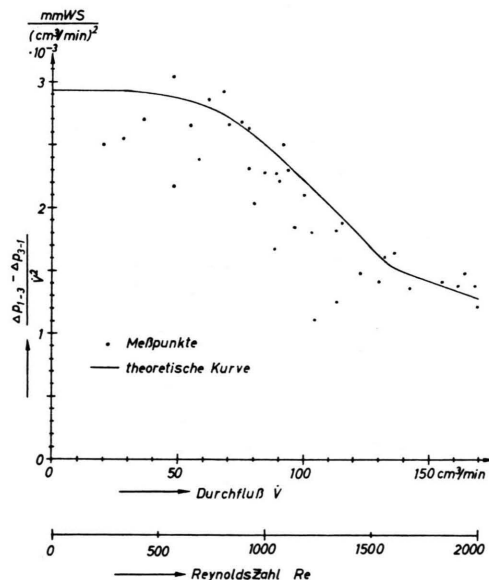


Abb. 7. Differenz der Druckabfälle für die beiden Strömungsrichtungen, bezogen auf das Quadrat des Durchflusses.



Die gestörte Rohrströmung ist also der ungestörten als Grundlösung vorzuziehen. Dies ist aber anschaulich ohne weiteres klar. Denn die Kanäle sind zu kurz, als daß die von der Einstromung herrührende Störung noch voll abklingen könnte. Man kann in Abb. 6 a die Querschnitte 1 und 2 nicht so weit nach außen schieben, daß man in ungestörte Bereiche der Strömung kommt. Die Störung verteilt sich im Gegenteil längs des kurzen Kanals nahezu homogen, und gerade dieser Umstand wird durch die als „gestörte Rohrströmung“ bezeichnete Lösung beschrieben.

### V. Aufstellung der Formeln für die Druckabfälle bei den beiden Strömungsrichtungen 1-3 und 3-1

Der an dem in den Abb. 1 und 2 skizzierten Rohr gemessene Druckabfall setzt sich entsprechend der Gln. (22 a, b) aus einem Anteil des Rohres selbst und dem Beitrag der Ein- und Ausströmöffnungen zusammen. Dabei ist für  $\lambda(\text{Re})$  die Lösung für die gestörte Rohrströmung nach Abb. 4 einzusetzen. Diese enthält bereits die durch die Querschnittsänderungen verursachten zusätzlichen Verwirbelungen. Weitere Wärmeverluste ergeben sich nur noch an den extrem starken Querschnittssprüngen, d. h. am Ausgang vom Rohr 2 zum Raum 3 (s. Abb. 1), weil dort die Verhältnisse durch die einfache Rohrtheorie nicht wiedergegeben werden, und am Eingang vom Raum 3 zum Rohr 2, weil in diesem Falle die Kontraktionszone (vena contracta, s. Abb. 6 c) besonders stark ausgebildet und die homogene Verteilung der Störung dadurch nicht gegeben ist. Eine andere Erklärung dafür, daß nur an den angegebenen Stellen weitere Energieverluste in Rechnung zu setzen sind, ist vielleicht darin zu suchen, daß durch die Art der Bearbeitung des vermessenen Rohres der Querschnittsprung 2-3 in Abb. 1 eine schärfere Kante aufweist als der Querschnittsprung 1-2. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die Flüssigkeit beim Austritt aus dem Rohr 2 in den Raum 3 sich nicht über den ganzen Querschnitt verteilt, sondern bevorzugt in Vorwärtsrichtung strömt. Der Querschnitt  $F_3$  sei deshalb nicht gleich Unendlich gesetzt, sondern sei durch die Höhe  $d$  der den Raum 3 bildenden Dose gegeben und zu

$$F_3 = d^2 \frac{1}{4} \pi \quad (24)$$

angesetzt.

Damit ergibt sich:

1) für die Strömungsrichtung 1-3:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{1}{2} \varrho (\bar{v}_2^2 \gamma_{3,2} - \bar{v}_1^2 \gamma_{3,1}) \\ &= \frac{1}{2} \varrho \bar{v}_2^2 \left( \gamma_{3,2} - \gamma_{3,1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

nach der Bernoullischen Gl. (11 b) und

$$\begin{aligned} p_2 - p_3 &= \frac{1}{2} \varrho \bar{v}_2^2 \cdot 2 \frac{F_2}{F_3} \left( \gamma_{2,3} \frac{F_2}{F_3} - \gamma_{2,2} \right) \\ &\approx -\frac{1}{2} \varrho \bar{v}_2^2 \cdot 2 \gamma_{2,2} \frac{F_2}{F_3} \end{aligned}$$

nach Gl. (17 a, b) für die Ausströmöffnung in den Raum 3. Der Faktor  $(F_2/F_3)^2$  ist dabei als kleine Größe gleich Null gesetzt. Es ist also:

$$\zeta_{1-3} = \gamma_{3,2} - \gamma_{3,1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 2 \gamma_{2,2} \frac{F_2}{F_3} \quad (25)$$

2) für die Strömungsrichtung 3-1:

$$p_3 - p_2 = \frac{1}{2} \varrho \bar{v}_2^2 \frac{3}{2} \gamma_{2,2}$$

für die Einstromung aus dem Halbraum nach Gl. (19 a, b) und

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \frac{1}{2} \varrho (\bar{v}_1^2 \gamma_{3,1} - \bar{v}_2^2 \gamma_{3,2}) \\ &= \frac{1}{2} \varrho \bar{v}_2^2 \left( \gamma_{3,1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 - \gamma_{3,2} \right) \end{aligned}$$

nach der Bernoullischen Gl. (11 b). Es ist also:

$$\zeta_{3-1} = \frac{3}{2} \gamma_{2,2} - \gamma_{3,2} + \gamma_{3,1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \quad (26)$$

Die Größen  $\gamma_{k,2}$  beziehen sich dabei auf die Reynolds-Zahl  $\text{Re}$  nach Gl. (1 a), die Größen  $\gamma_{k,1}$  auf die Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_1 = \text{Re} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \quad (27)$$

Die Gln. (22 a, b), (25) und (26) sollen nun auf die in Abschnitt II beschriebenen und in den Abb. 3 und 7 dargestellten Messungen angewandt werden. Dabei sind die folgenden Daten benutzt:

Länge $L$ des Rohres 2	:	22,5 mm
Radius $R$ des Rohres 2	:	0,9 mm
Dicke $d$ der Dose (Raum 3)	:	8,0 mm
Durchmesser der Rohres 1	:	3,0 mm.

Es ist also

$$F_2/F_1 = \left( \frac{1,8}{3} \right)^2 = 0,36; \quad F_2/F_3 = \left( \frac{1,8}{8,0} \right)^2 \approx 0,05.$$

Außerdem ist

$$\eta = 10^{-2} \text{ g/cm s} \quad \text{und} \quad \varrho = 1 \text{ g/cm}^3.$$

Damit bekommt man für den vorliegenden Fall die Beziehungen:

$$\text{Re} = \frac{2 \varrho \dot{V}}{\pi R \eta} = 11,79 \frac{\text{min}}{\text{cm}^3} \cdot \dot{V}, \quad (29 \text{ a})$$

$$\text{Re}^2 \lambda = \frac{16 R^3 \varrho}{\eta^2 L} \Delta p = 5,09 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{mm WS}} \cdot \Delta p, \quad (29 \text{ b})$$

$$\zeta = \frac{2 R^4 \pi^2}{\varrho} \frac{\Delta p}{\dot{V}^2} = 4,59 \cdot 10^2 \frac{(\text{cm}^3/\text{min})^2}{\text{mm WS}} \frac{\Delta p}{\dot{V}^2}. \quad (29 \text{ c})$$

Die sich mit diesen Daten ergebenden theoretischen Kurven sind in die Abb. 3 und 7 mit eingetragen. Obwohl die Kurve für die Strömungsrichtung 1–3 in Abb. 3 ein wenig zu hoch liegt, ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment als gut zu bezeichnen.

## VI. Diskussion der Ergebnisse

Um ein Maß für den Störeinfluß der Ein- und Ausströmöffnung zu bekommen, sind die beiden Kurven in Abb. 3 mit dem Gesetz der laminaren Strömung zu vergleichen. Dieses ist durch die Anfangstangente an die untere Kurve festgelegt und ergibt sich aus

$$\text{Re}^2 \lambda = 64 \text{ Re} \quad (30)$$

$$\text{zu} \quad \Delta p = 0,1482 \frac{\text{mm WS}}{\text{cm}^3/\text{min}} \cdot \dot{V}. \quad (31)$$

Bei einem Volumendurchfluß von 100 cm<sup>3</sup>/min bedeutet dies also einen Druckabfall von 14,82 mm WS, während 28 bzw. 47 beobachtet werden. Der rein Bernoullische Anteil bei der Strömungsrichtung 3–1 ergibt sich aus

$$\begin{aligned} p_3 - p_1 &= \frac{1}{2} \varrho \{ \overline{v_1}^2 \gamma_{3,1} - \overline{v_3}^2 \gamma_{3,3} \} \\ &= \frac{1}{2} \varrho \overline{v_2}^2 \gamma_{3,1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \zeta_{\text{Bern}} = \gamma_{3,1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \quad (32)$$

nach (29 c) bei  $\dot{V} = 100 \text{ cm}^3/\text{min}$  und  $\gamma_{3,1} = 1,955$  zu  $\Delta p = 5,5 \text{ mm WS}$ . Mit  $14,8 + 5,5 = 20,3$  kommt man dem beobachteten Wert von 28 mm WS schon recht nahe. Bei der Strömungsrichtung 1–3 müßte sich aber bei rein Bernoullischem Zusatz ein Druckgewinn ergeben. Diese Diskussion zeigt deutlich, daß gerade bei der Strömungsrichtung 1–3 beim Übergang zwischen Rohr 2 und Raum 3 (Abb. 1) die Hauptenergieverluste auftreten.

Der auf diese Weise resultierende Gesamtdruckabfall am asymmetrischen kurzen Rohr läßt sich in dem vorliegenden Falle durch die Theorie der *gestörten Rohrströmung* und die in dieser Arbeit abgeleiteten Zusätze zum Druckgefälle recht gut beschreiben.